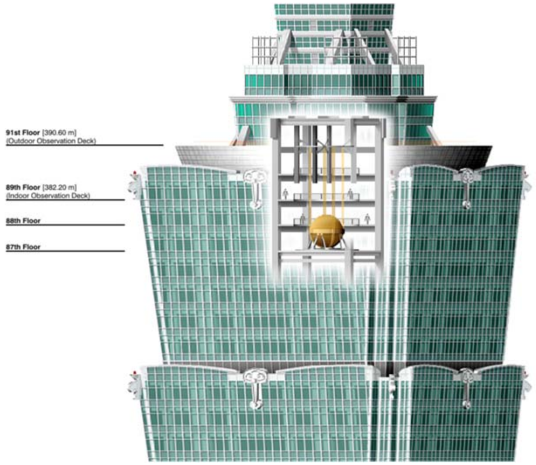
Cours 15 – 08/11/2017

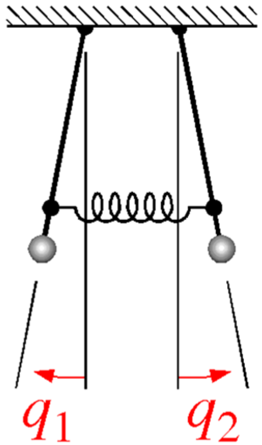
4. L’oscillateur harmonique

4.4 Oscillateur linéaire, amorti, et forcé

4.5 Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

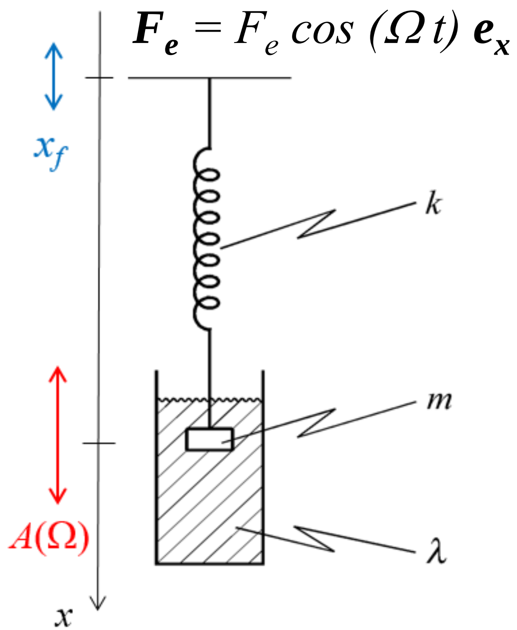
4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

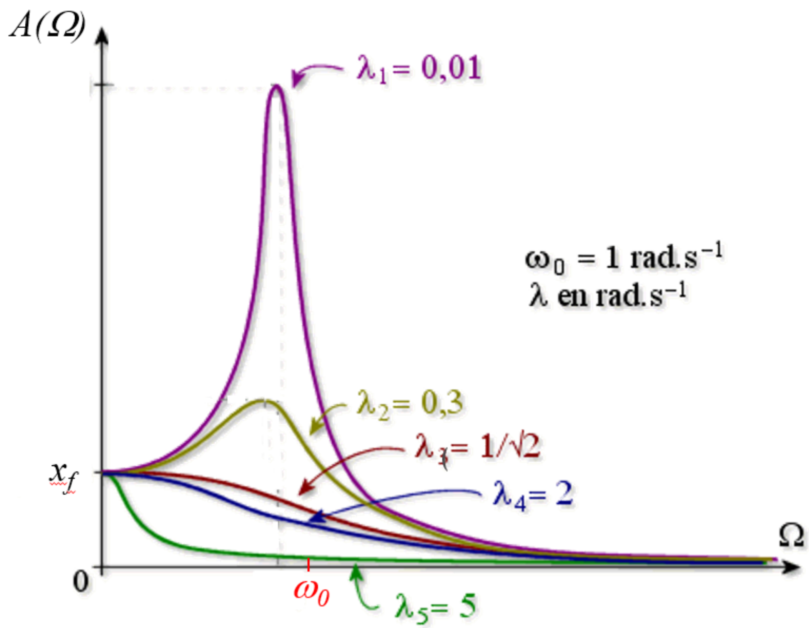




4.4 Oscillateur linéaire, amorti et forcé

Amplitude du mouvement





Equation du mouvement:

$$\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2\,\underline{x} = f\,e^{i\Omega t} = \frac{k x_f}{m}\,e^{i\Omega t}$$

avec x_f la variation d'allongement du ressort sous l'effet de la force excitatrice appliquée

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\boxed{A(\Omega)}}_{\text{amplitude}}\ \underbrace{\boxed{e^{i\Psi(\Omega)}}}_{\text{déphasage}}\ \underbrace{\boxed{e^{i\Omega t}}}_{\text{pulsation}}$$

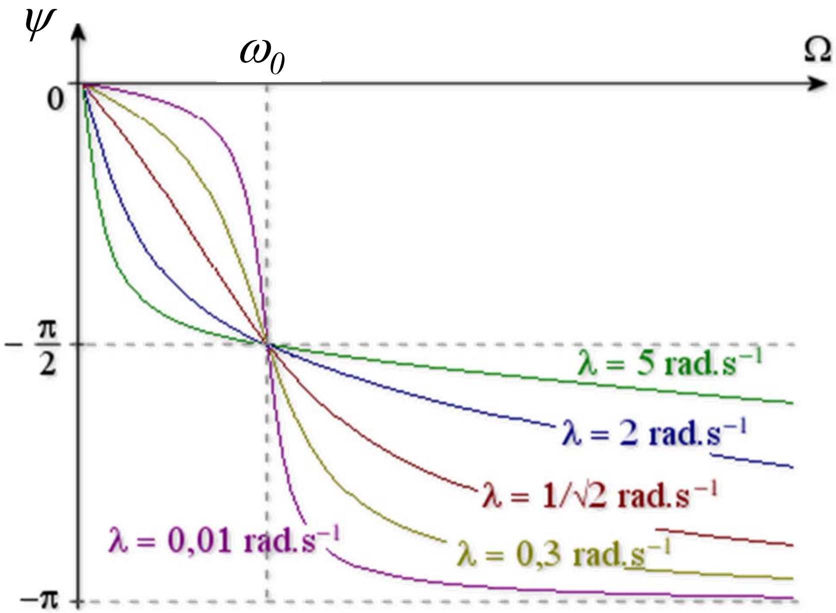
$$\boxed{A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\lambda\Omega\right)^2}}}$$

pulsation de résonance:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

4.4 Oscillateur linéaire, amorti et forcé

■ Déphasage

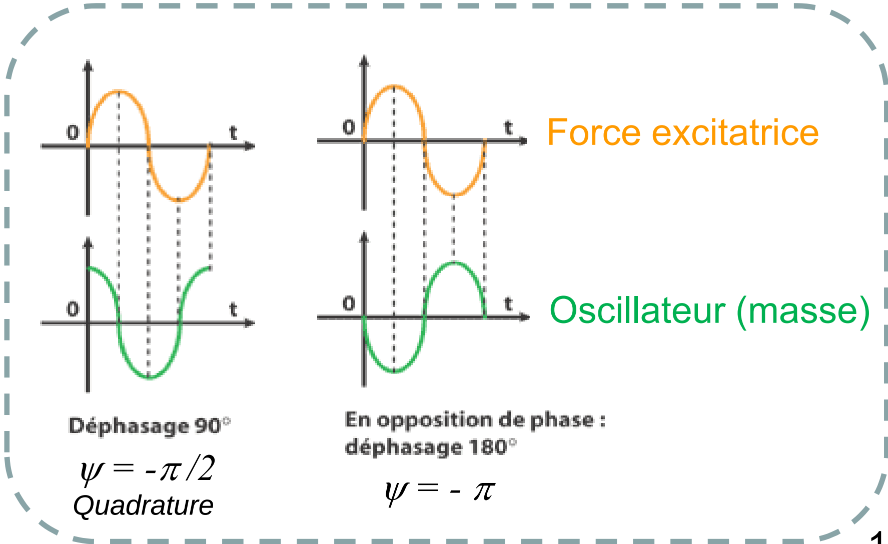


Déphasage pour différentes valeurs d'amortissement λ

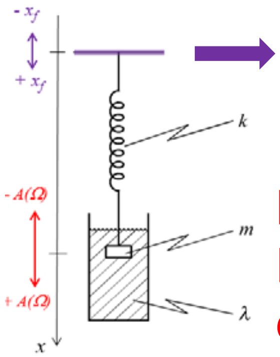
$$\boxed{\psi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

$\psi(\Omega)$: *déphasage du mouvement de de la masse m par rapport à l'excitation*

Remarque:
$\psi = -\pi/2$ pour $\Omega = \omega_0$ et ce quelque soit λ



4.4 Oscillateur linéaire, amorti, et forcé



Plaque mobile dont l'amplitude est $x_f \cos(\Omega t)$. Elle impose une force $k\, x_f \cos(\Omega t)$ sur le système ressort plus masse

La masse m est soumise à une force externe qui la met en mouvement. Elle atteint au bout d'un certain temps un régime oscillatoire permanent, dont la pulsation est celle de la force excitatrice Ω

Que se passe-t-il lorsque Ω augmente:

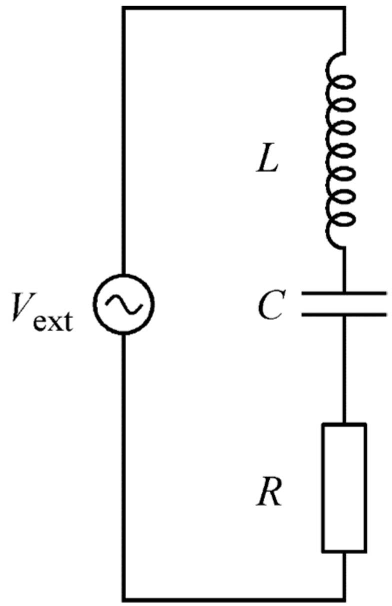
Si le mouvement de la plaque mobile est très lent (Ω petit), et si la constante de raideur est grande et/ou la masse petite (pour être précis si $\Omega << \omega_0$), alors la masse m «suit» le mouvement de la plaque. L'amplitude du mouvement de la masse est donc proche de x_f et le déphasage est quasi nul. Dans ce cas, la longueur du ressort est à peu près égale à l_0.

Lorsque Ω augmente, la masse «ne suit plus» le mouvement de la plaque: il y a un déphasage Ψ entre les deux mouvements. Cela conduit à une compression/extension du ressort, et donc à un apport d'énergie. L'énergie du système peut augmenter si la dissipation (due aux forces de frottement) est plus faible que l'apport d'énergie. Dans ce cas l'amplitude du mouvement de la masse augmente et devient supérieur à x_f.

Lorsque Ω devient très élevée (>> ω_0), la masse n'arrive plus à «suivre». La force externe maximale est $k\, x_f$, et l'accélération maximum de la masse vaut donc $A(\Omega)\Omega^2 = k\, x_f/m$. Par conséquent si Ω devient très grand, l'amplitude de la masse diminue et tend vers zéro. Son mouvement est en opposition de phase (seule solution pour que l'amplitude diminue).

4.5 Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

On considère un circuit RLC soumis à une tension alternative $V_{ext}(t)=V_0 \sin\Omega t$



Tension aux bornes de la bobine*: $V_L = LdI/dt = Ld^2Q/dt^2$

Tension aux bornes du condensateur: $V_C=Q/C$

Tension aux bornes de la résistance: $V_R= RI=RdQ/dt$

Loi des mailles: $V_{ext} = V_L + V_R + V_C$

Soit $Ld^2Q/dt^2 + RdQ/dt + Q/C = V_0 \sin\Omega t$

Ou encore
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\lambda = \frac{R}{L}}\frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}Q = (V_0 / L)\sin\Omega t$$

Analogie avec
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)}$$

* la bobine est parfaitement inductive (résistance nulle)

4.5 Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

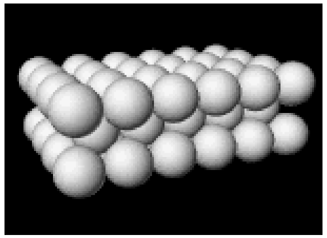
$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Oscillateur générique	RLC	Masse soumise à un ressort
z	q = charge éléctrique	x = déplacement
$\dot{z}$	$\dot{q} = i$ = intensité	$\dot{x}$ = vitesse
$\ddot{z}$	$\ddot{q} = \frac{di}{dt}$	$\ddot{x}$ = accélération
β	L = inductance propre	m = masse du mobile
ρ	R = résistance	α = coef de frottement
γ	$\frac{1}{C}$ = inverse de la capacité	k = constante de raideur
$T = 2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ = période propre	$T = 2\pi\sqrt{LC}$ = période propre	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ = période propre
f	$U = RI$: effet Joule	$f = \alpha\dot{x}$: force de frottement

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

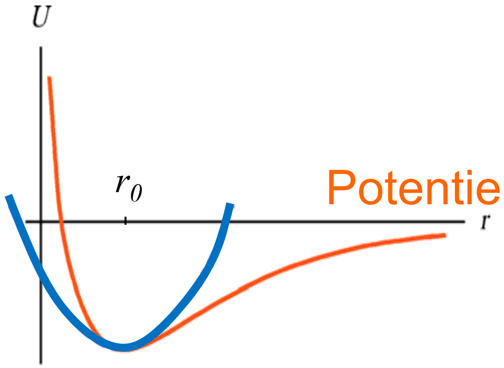
- **Exemple: une voiture et ses 4 amortisseurs**

- **Exemple: un solide cristallin**



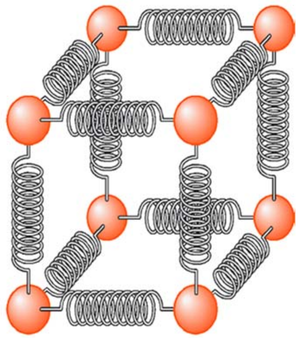
Un cristal est un arrangement régulier d'atomes. L'interaction entre atomes peut être assimilée à un ressort

Potentiel d'interaction entre 2 atomes



Potentiel inter-atomique

Potentiel harmonique $U(r) \sim (r-r_0)^2$



⇨ Les liaisons peuvent être décrites comme des ressorts
⇨ N oscillateurs couplés

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

Une application des oscillateurs couplés: un système antisismique

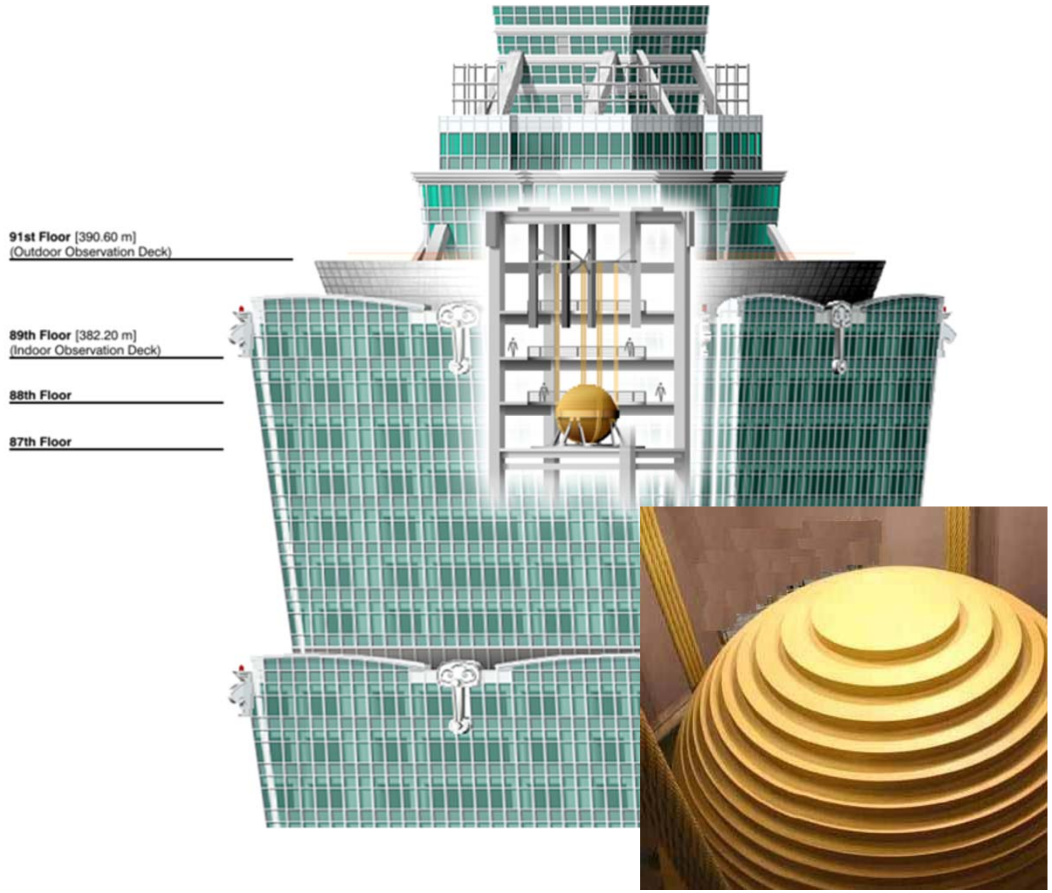
La tour Taipei 101 (Taiwan)

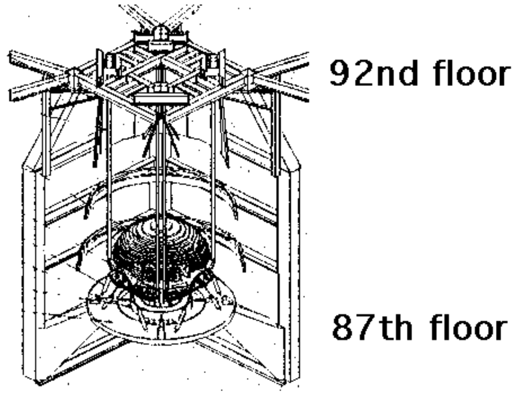
509 m de hauteur

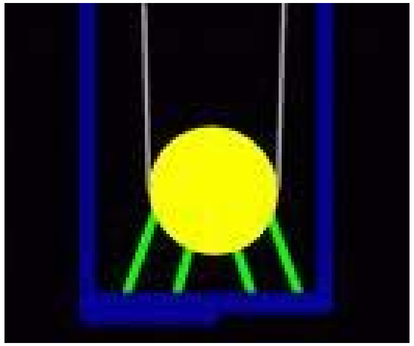
Cette tour est un oscillateur

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

Une application des oscillateurs couplés: un système antisismique







Un deuxième oscillateur est présent au sommet de la tour (un pendule de 660 tonnes)

Les deux oscillateurs sont couplés: le pendule amortit les oscillations
de la tour grâce à un système d'amortisseurs hydrauliques

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ Exemples