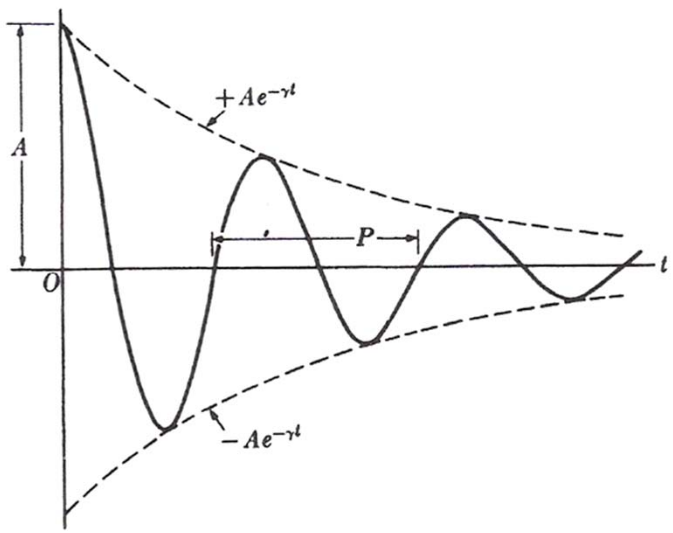
Cours 13 – 01/11/2017

4. L'oscillateur harmonique linéaire libre

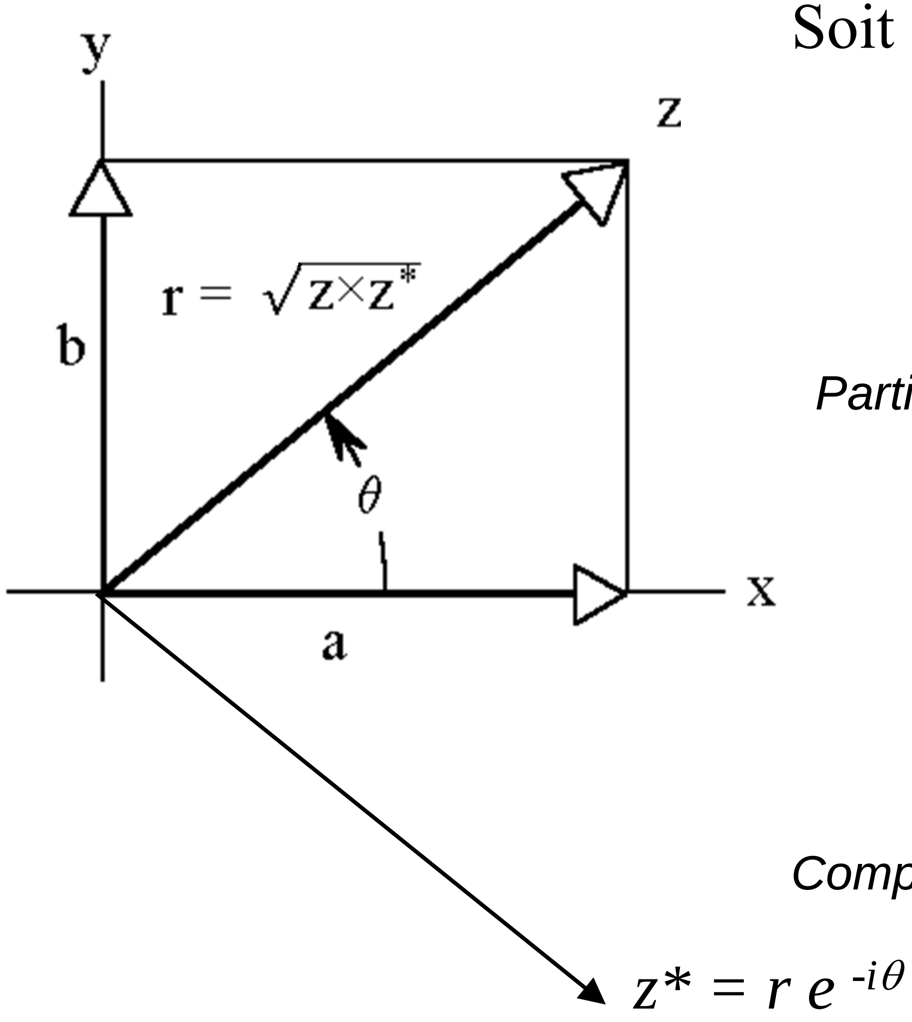
4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre



$$x(t) = A\,e^{-\lambda t}\cos(\omega\,t+\phi)$$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

■ Nombres complexes



Soit le nombre complexe z:

$$z = a + ib = r\, e^{\,i\theta}$$

Partie réelle: $\Re(z) = a = r\cos\theta$

Partie imagninaire: $\Im(z) = b = r\sin\theta$

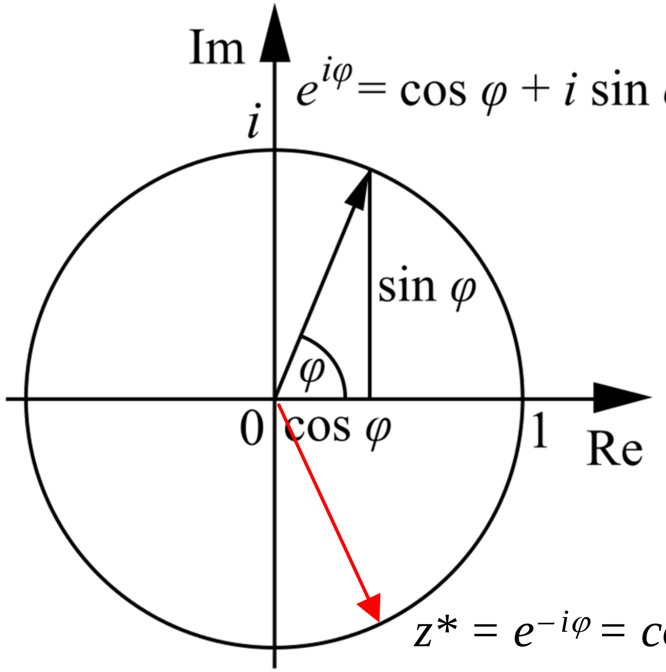
Module: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\arg(z) = \theta = \arctan(b/a)$

Complexe conjugué: $z^* = a - ib = r\ e^{-i\theta}$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

■ Nombres complexes



Soit le nombre complexe z de norme 1:

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ *(rem: $e^{i\pi} + 1 = 0$, identité d'Euler*)*

$$z^* = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

avec
$$\begin{cases} \cos\varphi = Re\{e^{i\varphi}\} = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = Im\{e^{i\varphi}\} = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

avec $\varphi = \omega t$

Une solution de type $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ peut s'écrire sous forme complexe telle que :

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = C e^{\gamma t}$$

avec γ nombre complexe, et C_1, C_2, C sont des constantes

*Euler (1707-1783 – né à Bâle)

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

■ Nombres complexes

Exemple: application à l'oscillateur harmonique non amorti (λ=0)

Equation du mouvement: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$

Solution générale: $x(t) = C\, e^{\gamma t}$

On injecte $x(t) = C\, e^{\gamma t}$ *dans l'équation différentielle (1)*

On trouve $\gamma^2 C\, e^{\gamma t} + \omega_0^2\, C\, e^{\gamma t} = 0 \Rightarrow C\, e^{\gamma t}(\gamma^2 + \omega_0^2) = 0$

La solution non-triviale est $(\gamma^2 + \omega_0^2) = 0$ *soit* $\gamma^2 = -\,\omega_0^2$

or $i^2 = -1$ *donc* $\gamma^2 = i^2\, \omega_0^2$ *et finalement* $\gamma = \pm\, i\, \omega_0$ *Il y a 2 solutions possibles*

$$\boxed{x(t) = C_1\, e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}} = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

La solution générale est une combinaison linéaire des solutions particulières $\gamma = +\, i\omega_0$ *et* $\gamma = -\, i\omega_0$

ϕ est le déphasage défini par les conditions initiales à $t=0$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

■ Oscillateur harmonique libre amorti ($\lambda \neq 0$)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

Quelles sont les solutions de cette équation différentielle ?

Technique de résolution:

i) on prend une fonction d'essai du type $x(t) = C\, e^{\gamma t}$

ii) on la substitue dans l'équation différentielle (1)
et on trouve $C\, e^{\gamma t}\,(\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2) = 0$ *(ceci quelque soit t)*

la solution non-triviale est $\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$

Equation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$

Rappel (cf. p 51 Savoir-faire en Math….)

$\text{Discriminant:}\ \Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = [-b \pm \Delta^{1/2}]/2a$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

■ Oscillateur harmonique libre amorti ($\lambda \neq 0$)

Nous cherchons les solutions de $\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$

avec $a = 1, b = 2\lambda, c = \omega_0^2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

$x_{1,2} = [-b \pm \Delta^{1/2}]/2a$

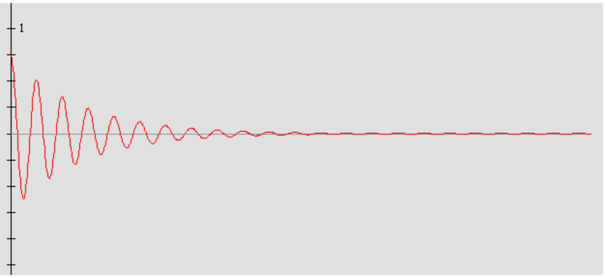
soit $\begin{cases} \gamma_1 = -\lambda + (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} \\ \gamma_2 = -\lambda - (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} \end{cases}$

La solution générale est la somme des solutions particulières avec γ_1 et γ_2

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} \qquad \text{A_1 et A_2 sont des constantes} \\ &= e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right) \end{aligned}}$$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

a) Amortissement faible $\lambda^2 < \omega_0^2$



Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

pour $\lambda^2 < \omega_0^2$ *nous avons* $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$

On rappelle que $i^2 = -1$

d'où $\lambda^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$ *avec* $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

On pose $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$ *et finalement* $\lambda^2 - \omega_0^2 = i^2\,\omega^2$

Il existe donc deux valeurs pour γ : $\gamma_1 = -\lambda + i\omega$ *et* $\gamma_2 = -\lambda - i\omega$

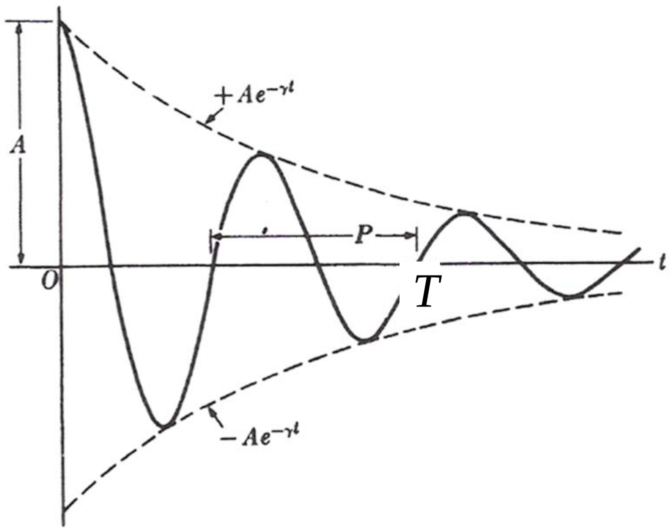
La solution générale est $x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + A_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$

ou encore $\boxed{x(t) = A\, e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)}$

Cette solution décrit un mouvement oscillatoire amorti, dont l'amplitude décroit avec le temps selon $e^{-\lambda t}$ *et avec une pulsation* $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$ $(< \omega_0)$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

a) Amortissement faible $\lambda^2 < \omega_0^2$



$$\boxed{x(t) = A\, e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)}$$

avec $\begin{cases} \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 & \textit{pulsation} \\ T = 2\pi/\omega & \textit{période} \\ \phi & \textit{déphasage} \end{cases}$

On détermine les constantes A et ϕ par les conditions initiales à $t = 0$

Exemple de conditions initiales à $t=0$: $x(0) = x_0$ *et* $v(0) = 0$

$x(0) = A\cos(\phi) = x_0$

$\Rightarrow A = x_0 / \cos\phi$

$$\frac{dx}{dt} = A(-\lambda)\cos(\phi) - A\omega\sin(\phi) = 0$$

$\Rightarrow \tan\phi = -\lambda/\omega$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

b) Amortissement fort $\lambda^2 > \omega_0^2$

Nous avons toujours $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

mais avec $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$

donc $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm \omega$ *avec* $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

Les solutions sont alors $$\boxed{x\left(t\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A_1\mathrm{e}^{\omega t} + A_2\mathrm{e}^{-\omega t}\right)}$$

Mouvement apériodique

si conditions initiales sont $x(0) = x_0$ *et* $v(0) = 0$

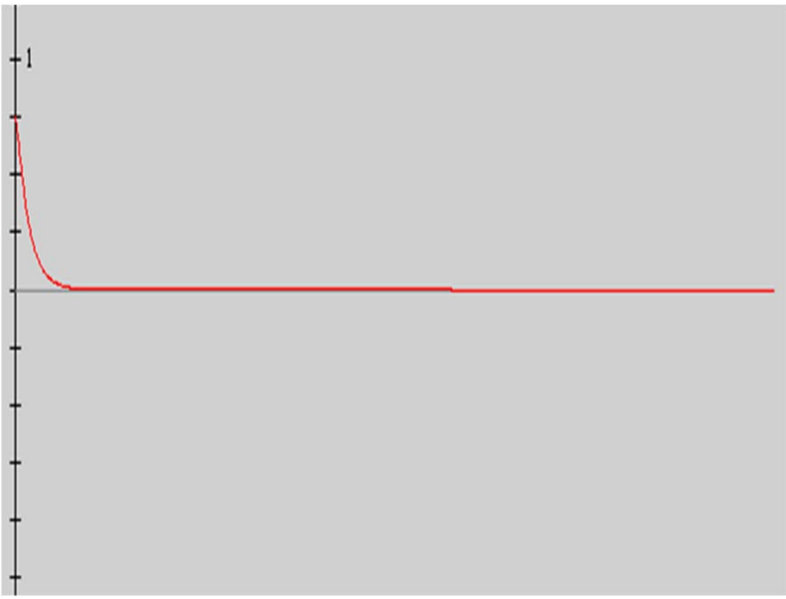
alors $A_1 = x_0\dfrac{\omega+\lambda}{2\omega},\ A_2 = x_0\dfrac{\omega-\lambda}{2\omega}$

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

c) Amortissement critique $\lambda^2 = \omega_0^2$

Dans ce cas la solution de l'équation différentielle est de la forme

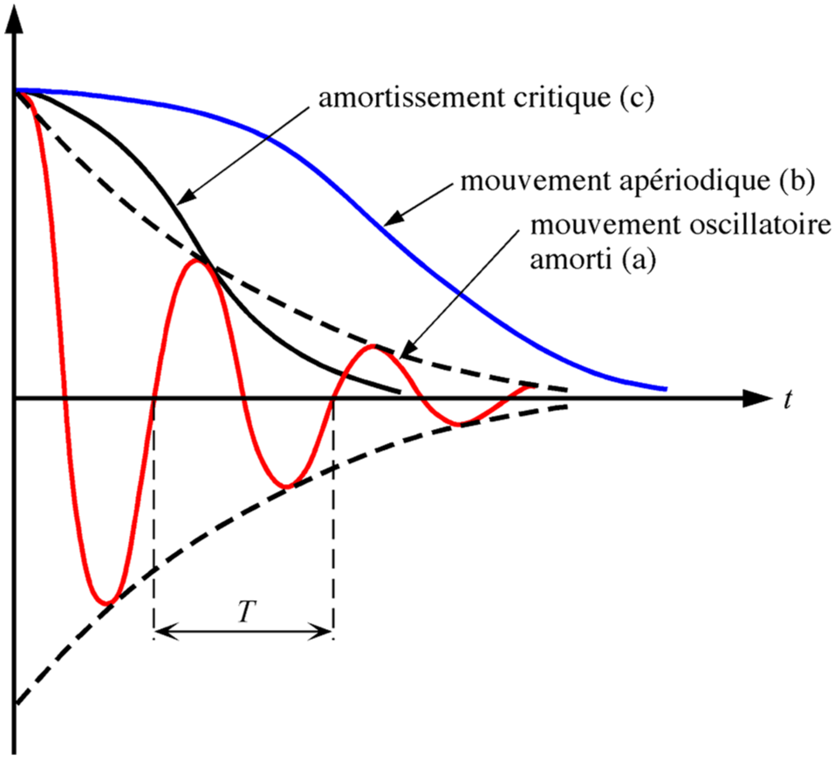
$$\boxed{x(t) = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}}$$



***Amortissement critique:** retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans aucune oscillation*

4.3 Oscillateur linéaire, amorti et libre

Résumé des différents régimes d'amortissement



- ***Amortissement faible*** $\lambda^2 < \omega_0^2$

Mouvement oscillatoire avec amplitude décroissante

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

- ***Amortissement fort*** $\lambda^2 > \omega_0^2$

Mouvement apériodique (plus d'oscillations)

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A_1 \mathrm{e}^{\omega t} + A_2 \mathrm{e}^{-\omega t}\right)$$

avec $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

- ***Amortissement critique*** $\lambda^2 = \omega_0^2$

Retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans la moindre oscillation

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}$$