09/11/17

Cours 16 – 09/11/2017

4. L'oscillateur harmonique

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

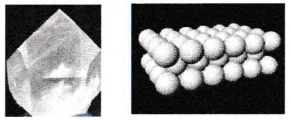
5. Mouvements centraux, effets gyroscopiques

5.1 Mouvement des planètes

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

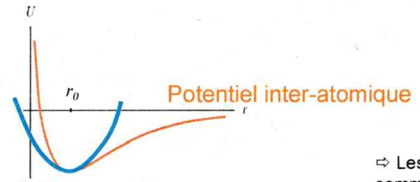
■ **Exemple: une voiture et ses 4 amortisseurs**

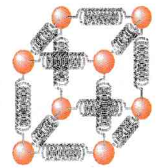
■ **Exemple: un solide cristallin**



Un cristal est un arrangement régulier d'atomes. L'interaction entre atomes peut être assimilée à un ressort

Potentiel d'interaction entre 2 atomes





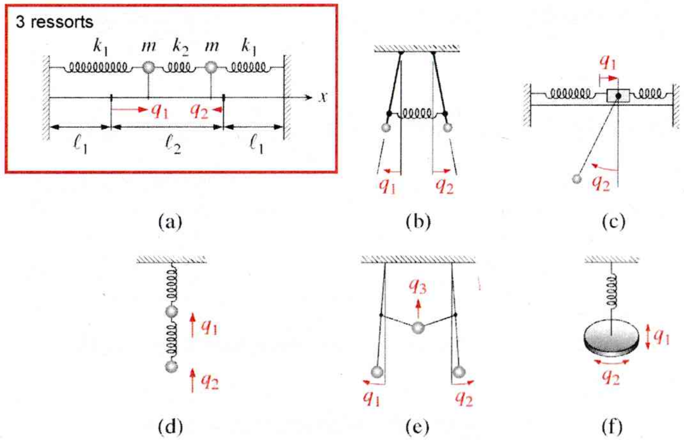
Potentiel harmonique $U(r) \sim (r-r_0)^2$

$\Delta r^2 \to$ ressort

⇨ Les liaisons peuvent être décrites comme des ressorts
⇨ N oscillateurs couplés

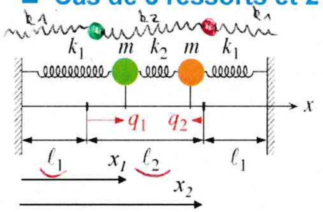
4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Exemples**



4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques**



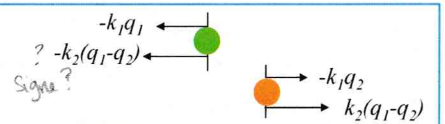
$q_1 = x_1 - l_1$

$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$

l_1, $l_2 + l_1$ sont les positions d'équilibre

q_1 et q_2 sont les écarts par rapport aux positions d'équilibre

Bilan des forces



⚠ Attention au signe !
→ k1 veut "rappeler" le ressort
→ k2 repousse le ressort

2nd loi de Newton

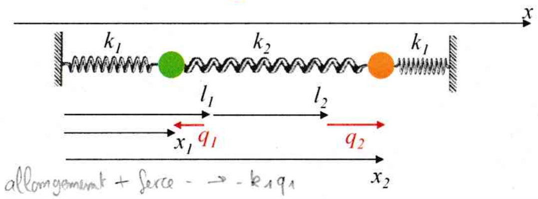
$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -k_1q_1 - k_2(q_1 - q_2)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -k_1q_2 + k_2(q_1 - q_2)$$

1

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Cas de 3 ressorts avec 2 masses identique avec configuration initiale différente**



allongement + force → $-k_1 q_1$

$$q_1 = x_1 - l_1$$
$$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$$

2nd loi de Newton

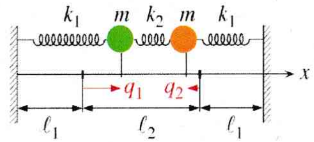
● $$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -k_1q_1 - k_2q_1 + k_2q_2 = -k_1q_1 - k_2(q_1 - q_2)$$

● $$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -k_1q_2 - k_2q_2 + k_2q_1 = -k_1q_2 + k_2(q_1 - q_2)$$

On remarque que les équations sont les mêmes quelque soit la configuration initiale
(ce sont les solutions qui dépendent des conditions initiales)

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques**



Nous avons 2 équations du mouvement

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)\, q_1 - k_2 q_2 = 0 \\ & m\ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_1 + k_2)\, q_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ *ces équations sont couplées*

Les solutions des modes propres sont de la forme:

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)\,,\quad q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Rem: ω et φ ne sont pas connues. Nous savons seulement que les solutions doivent s'écrire sous la forme $\cos(\omega t + \varphi)$. Il nous faut donc les déterminer

Nous avons donc deux équations couplées

$$\boxed{\begin{aligned} & (-m\omega^2 + k_1 + k_2)\, C_1 - k_2 C_2 = 0 \\ & -k_2 C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)\, C_2 = 0 \end{aligned}}$$

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

$$\boxed{(-m\omega^2 + k_1 + k_2)}\, C_1 \boxed{- k_2} C_2 = 0$$
$$\boxed{-k_2}\, C_1 + \boxed{(-m\omega^2 + k_1 + k_2)}\, C_2 = 0$$

sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations admet une solution si le déterminant D de la matrice est nul

$$\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$$

soit $$\boxed{(-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 - k_2^2 = 0}$$

Equation caractéristique qui détermine ω

Nous avons finalement deux solutions

i) $-m\omega^2 + k_1 + k_2 = +k_2$ ⇨ $\boxed{\omega_+ = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}}$

ii) $-m\omega^2 + k_1 + k_2 = -k_2$ ⇨ $\boxed{\omega_- = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}}}$

Rem: $\omega_+ < \omega_-$

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Mode propre « acoustique » ω_+** $\quad \omega_+ = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$

En injectant ω_+ dans $(-m\omega^2 + k_1 + k_2)\, C_1 - k_2 C_2 = 0$

⇨ $C_1 = C_2 = C_+$

avec comme forme générale des solutions:

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)\,,\quad q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

La solution est alors $$\boxed{q_1(t) = q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)}$$

Les masses se déplacent en phase

Remarque: $\omega_+ = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$ le ressort central (k_2) est **inactif**

2

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Mode propre « optique » ω_-** $\quad \omega_- = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}}$

En injectant ω_- dans $\left(-m\omega^2 + k_1 + k_2\right) C_1 - k_2 C_2 = 0$

⇨ $C_1 = - C_2 = C_-$

De la même façon nous trouvons l'autre solution

$$\boxed{q_1(t) = -q_2(t)} \qquad \begin{aligned} q_1(t) &= C_- \cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right) \\ q_2(t) &= -C_- \cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right) \end{aligned}$$

Les masses bougent dans le sens opposé

Masses en opposition de phase

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Cas général**

le mouvement dépend des conditions initiales à t=0 et peut être compliqué. Néanmoins, il sera toujours une combinaison linéaire des deux solutions particulières (appelées modes propres)

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(t) &= C_+ \cos\left(\omega_+ t + \varphi_+\right) + C_- \cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right) \\ q_2(t) &= C_+ \cos\left(\omega_+ t + \varphi_+\right) - C_- \cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right) \end{aligned}}$$

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

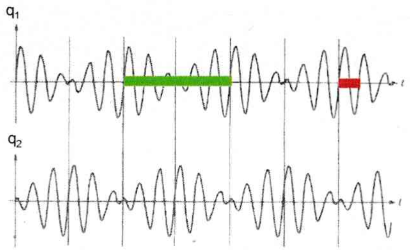
■ **Cas particulier**

Amplitudes égales ($C_+ = C_- = C$) et phases initiales nulles ($\varphi_+ = \varphi_- = 0$)

$$q_1(t) = C\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\Rightarrow q_1(t) = 2C \cos\left(\tfrac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right)$$

$\Delta\omega^-$ $\quad$ $\Delta\omega^+$

$$q_2(t) = C\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\Rightarrow q_2(t) = -2C \sin\left(\tfrac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right)$$

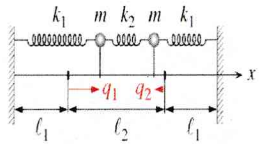


La modulation de l'amplitude est en opposition de phase

⇨ transfert d'énergie

4.6 Oscillateurs harmoniques couplés

■ **Energie totale du système**



Energie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

Energie potentielle:
$$\begin{aligned} E_p &= \tfrac{1}{2}k_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}k_1 q_2^2 + \tfrac{1}{2}k_2 (q_1 - q_2)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}k_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}k_1 q_2^2 + \tfrac{1}{2}k_2 q_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2 q_2^2 - k_2 q_1 q_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) q_1^2 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) q_2^2 - k_2 q_1 q_2 \end{aligned}$$

Finalement, l'énergie totale s'écrit

$$E = E_c + E_p = \overbrace{\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2}^{Et} + \overbrace{\tfrac{1}{2}mv_2^2 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2}^{Et} - k_2 q_1 q_2$$

Energie particule 1 | Energie particule 2 | Energie de couplage (interaction)

3